Metody dowodzenia w rachunku zdań

(sprawdzania, że formuła jest tautologią).

metoda zerojedynkowa	/dowolna formuła/
skrócona zerojedynkowa	/implikacja/
założeniowa (dowodów założeniowych)	/schematy logiczne/
dowód formalny	/dowolna formuła/

Metoda zerojedynkowa.

Przykład 3. Sprawdzić prawdziwość następującej formuły:

$$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Wartości logiczne w ostatniej kolumnie są identyczne, co dowodzi, że schemat jest prawdziwy dla dowolnych wartości logicznych zmiennych logicznych wchodzących w skład schematu, czyli jest **tautologią**.

Przykład 4. Sprawdzić prawdziwość następującej formuły:

$$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

Ostatnia kolumna przyjmuje różne wartości w zależności od wartości jakie przyjmują zmienne wchodzące w jej skład, czyli schemat nie jest tautologią.

Metoda zerojedynkowa skrócona

Skróconym sprawdzaniem zerojedynkowym wykazujemy, że wyrażenie rachunku zdań o postaci implikacji jest prawem logicznym, gdy jest wykluczone, by dla jakiegoś układu wartości logicznych przyporządkowanego zmiennym poprzednik tej implikacji był prawdziwy a jej następnik fałszywy.

Zakładając np. prawdziwość poprzednika takiej implikacji i wykazując, że wtedy jej następnik musi być prawdziwy, wykazujemy tym samym, że implikacja ta jest prawem logicznym.

Podobnie zakładając fałszywość następnika danej implikacji i wykazując, że jej poprzednik musi być wtedy fałszywy, wykazujemy tym samym, że jest wykluczone, by dla jakiegoś układu wartości logicznych przyporządkowanego jej zmiennym jej poprzednik był prawdziwy, a jej następnik fałszywy, a więc wykazujemy, że jest ona prawem logicznym.

„1 – 1”

$$\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$1\quad 0\,0\,0 \qquad\qquad 1\,0\;1\;1\;0$$

Zakładamy, że poprzednik tej implikacji, tj. wyrażenie "$\neg$(p ∨ q)", ma wartość 1.

Wtedy wyrażenie "p ∨ q" ma wartość 0, a wówczas zarówno "p" jak i "q" mają wartość 0.

Wtedy zaś zarówno "$\neg$p" jak i "$\neg$q" mają wartość 1.

Jeśli poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, to i jej następnik jest prawdziwy, a więc ta implikacja jest prawem logicznym.

Strzałka umieszczona pod sprawdzeniem wskazuje na jego kierunek: zakładając prawdziwość poprzednika dochodzimy do stwierdzenia, że następnik musi być wtedy prawdziwy.

„0 – 0”

$$\left(\neg p \wedge \neg q\right) \rightarrow \neg\left(p \wedge q\right)$$
$$0\,1\;0\;\;0\,1\qquad 0\;1\;\;1\;1$$

Zakładamy, że następnik implikacji, tj. wyrażenie "¬(p ∧ q)" ma wartość 0.

Wtedy koniunkcja "p ∧ q" ma wartość 1, a więc oba jej człony mają też wartość 1.

Negacje tych członów, tj. wyrażenia "¬p" i "¬q" mają wtedy wartość 0, a więc i ich koniunkcja "¬p ∧ ¬q", stanowiąca poprzednik implikacji, ma wartość 0.

Jeśli następnik tej implikacji jest fałszywy, to i jej poprzednik jest fałszywy, a więc implikacja ta jest prawem logicznym.

Strzałka umieszczona pod sprawdzeniem wskazuje na jego kierunek: zakładając fałszywość następnika dochodzimy do stwierdzenia, ze poprzednik musi być wtedy fałszywy.

Metoda zerojedynkowa skrócona dla klauzul

W rachunku zdań, każdą implikację w której przesłanki są połączone za pomocą koniunkcji, nazywamy ***schematem wnioskowania*** *(logicznym) lub* ***klauzulą****.*

Klauzule to formuły postaci:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$$

Zmiana sposobu zapisu klauzul.

$$p \rightarrow q \qquad\qquad \frac{p}{q}$$

Schemat logiczny nazwiemy ***schematem niezawodnym***, jeśli prowadzi od prawdziwych przesłanek do prawdziwych wniosków.

Metoda zerojedynkowa skrócona dla klauzul to metoda zerojedynkowa skrócona dla formuł, która uwzględnia specyfikę klauzul. Tak jak poprzednio istnieją dwie wersje metody.

Wersja pierwsza

metody „0-1” dla klauzul,

w której zakładamy prawdziwość poprzednika takiej implikacji

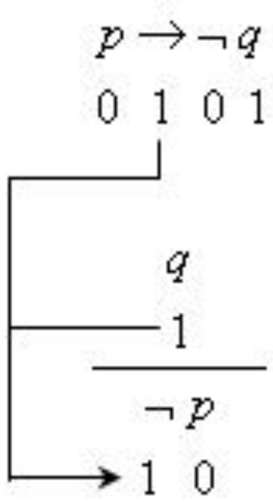
i wykazujemy, że wtedy jej następnik musi być prawdziwy (wnioskowanie pozytywne).

Ponieważ jednak poprzednik implikacji to koniunkcja formuł, to założenie prawdziwość poprzednika implikuje tym iż zakładamy, że każdy element koniunkcji jest prawdziwy.

Przykład 5. Udowodnić następujący schemat metodą zerojedynkową:

$$((p \to \neg q) \wedge q) \to \neg p$$

Rozwiązanie



Wersja druga

metody „0-1” dla klauzul, w której zakładamy fałszywość następnika danej implikacji

i wykazujemy, że jej poprzednik musi być wtedy fałszywy (wnioskowanie negatywne).

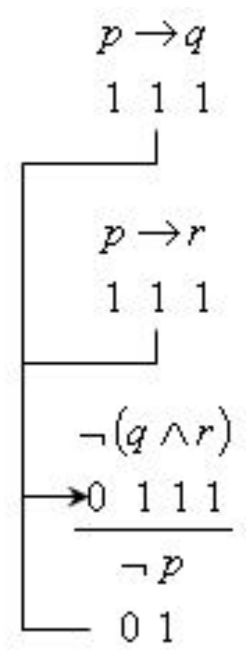
Ponieważ jednak poprzednik implikacji to koniunkcja formuł, to do wykazania jego fałszywości wystarczy pokazanie nieprawdziwości jednego założenia.

Oznacza to, iż (w razie takiej potrzeby) możemy dodatkowo założyć iż prawie wszystkie założenia, z wyjątkiem jednego, są prawdziwe i na tej podstawie wykazać iż pozostałe wyrażenie jest fałszywe (ma wartość logiczną *false*).

Przykład 6. Udowodnić następujący schemat metodą zerojedynkową:

$$\left(\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(p \rightarrow r\right) \wedge \neg\left(q \wedge r\right)\right) \rightarrow \neg p$$

Rozwiązanie



Metoda założeniowa dowodzenia poprawności schematów logicznych

Metodą dowodów założeniowych można wykazywać poprawność schematów rachunku zdań (klauzuli). Poprawność jest wykazana, jeśli możemy stwierdzić, że rozpatrywane przez nas wnioskowanie podpada pod jakiś schemat formalny, którego niezawodność już została wykazana.

Metoda ta nie sprawdza się jednak przy wykazywaniu zawodności schematów.

W metodzie dowodów założeniowych dodatkowo przyjmujemy, że niektóre schematy logiczne (wyszczególnione poniżej) są niezawodne.

Nazywamy je ***schematami pierwotnymi****,* zdania stwierdzające zaś, że są one schematami niezawodnymi nazywamy ***regułami pierwotnymi***.

Są one dobrane w taki sposób by **ich niezawodność nie budziła żadnych wątpliwości**.

Schematy pierwotne (reguły pierwotne)

1.	Reguła odrywania (**RO**)	$\dfrac{p \to q,\ p}{q}$
2.	Reguła dołączania koniunkcji (**DK**)	$(p) \wedge (q) \to (p \wedge q)$
3.	Reguła opuszczania koniunkcji (**OK**)	$(p \wedge q) \to p$ $(p \wedge q) \to q$
4.	Reguła dołączania alternatywy (**DA**)	$p \to (p \vee q)$ $q \to (p \vee q)$
5.	Reguła opuszczania alternatywy (**OA**)	$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$ $((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$
6.	Reguła dołączania równoważności (**DE**)	$((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (p \leftrightarrow q)$
7.	Reguła opuszczania równoważności (**OE**)	$(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$ $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$

Metoda założeniowa

Opierając się na niezawodności reguł pierwotnych możemy dowodzić prawdziwości innych schematów (reguł) zwanych ***wtórnymi***.

Przykład 7.

Udowodnić metodą założeniową schemat znany jako ***sylogizm warunkowy***:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$$

Dowód:

1. $p \rightarrow q$ założenie
2. $q \rightarrow r$ założenie
3. p poprzednik tezy
4. q otrzymane w wyniku zastosowania (RO) z linii 1,3
5. r otrzymane w wyniku zastosowania (RO) z linii 2,4

Co kończy dowód bowiem otrzymaliśmy następnik tezy.

Metoda założeniowa

Przykład 8.

Udowodnić metodą założeniową schemat znany jako ***modus tollens:***

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

Dowód:

1.	$(p \rightarrow q)$	założenie
2.	$\neg q$	założenie
3.	$p \quad (p \equiv \neg\neg p)$	założenie dowodu nie wprost (hipoteza)
4.	q	otrzymane w wyniku zastosowania (RO) z linii 1 i 3
5.	$\neg q \wedge q$	(DK) dla 2 i 4 – sprzeczność

Co dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Zastosowano tu metodę ***dowodu nie wprost***. Polega ona na tym, że uważając za spełnione wszystkie założenia dołączamy do nich hipotezę będącą zaprzeczeniem tezy. Prowadzimy rozumowanie dotąd, dokąd nie dojdziemy do wniosku, że taka koniunkcja założeń i hipotezy jest albo fałszywa sama w sobie (sprzeczność), albo wynika z niej zdanie fałszywe.